1. $v(1) = v(3) = 0\,;\, v(2) = 1\,;\, v(4) = 2$

2. Si n est un nombre entier impair, il est premier avec 2, donc il est premier avec toute puissance de 2 ; aucune puissance strictement positive de 2 ne le divise. Dans ce cas : $v(n) = 0$.

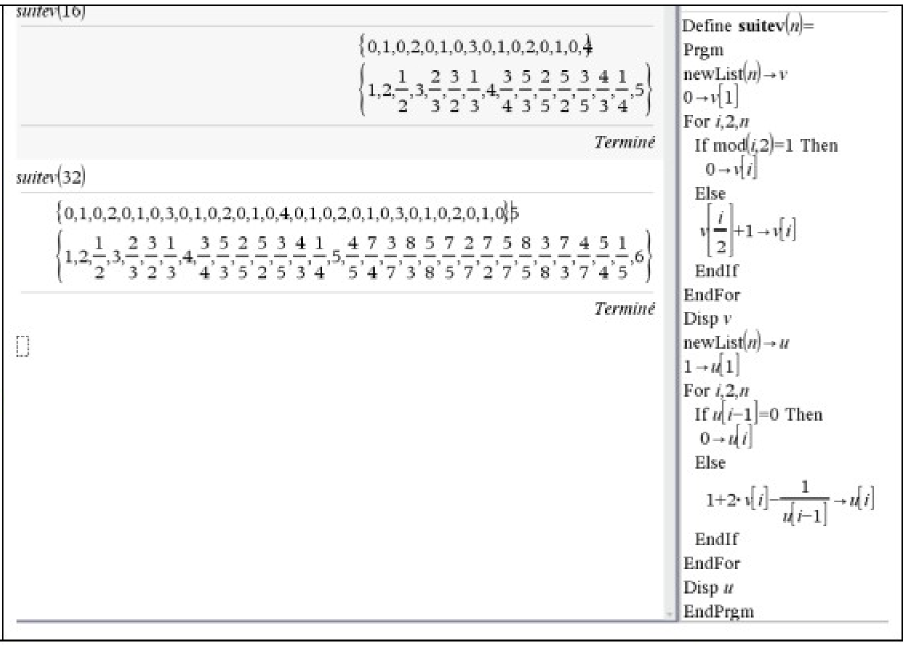
Si n est un nombre pair, soit m l'entier $m = \frac{n}{2}$.

Quel que soit l'entier j : 2^j divise m si et seulement si 2^{j+1} divise $2m = n$.

En conséquence : $v(n) = \max\limits_{j \text{ divise } n} 2^j = 2 \times \max\limits_{j \text{ divise } m} 2^j = 2 \times v\left(\frac{n}{2}\right)$.

3. Avec TI-Nspire CAS, calcul des 16, puis des 32 premiers termes des suites u et v.

On vérifie au passage qu'en effet $u(8) = 4$.



4. Montrons d'abord par récurrence sur n la propriété $\wp_n$: « $u_{2n} = u_n + 1$ et $u_{2n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$ ».

Initialisation : $u_2 = 2 = u_1 + 1$ et $u_3 = \frac{1}{2} = \frac{u_1}{u_1+1}$, ce qui montre que $\wp_1$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier n, les relations $u_{2n} = u_n + 1$ et $u_{2n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$ soient vérifiées.

Etudions ce qu'il se passe aux rangs $(2n+2) = 2 \times (n+1)$ et $(2n+3) = 2 \times (n+1) + 1$:

Rang $(2n+2)$: $u_{2n+2} = 1 + 2v(2n+2) - \frac{1}{u_{2n+1}} = 1 + 2(v(n+1)+1) - \frac{u_n+1}{u_n} = 2 + 2v(n+1) - \frac{1}{u_n}$.

Nous obtenons : $u_{2n+2} = 1 + \left(1 + 2v(n+1) - \frac{1}{u_n}\right) = 1 + u_{n+1}$

Rang $(2n+3)$: $u_{2n+3} = 1 + 2v(2n+3) - \frac{1}{u_{2n+2}} = 1 + 2 \times 0 - \frac{1}{1+u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{1+u_{n+1}}$.

Si $\wp_n$ est vérifiée, alors $\wp_{n+1}$ l'est aussi, la propriété $\wp_n$ est héréditaire.

Etant initialisée au rang 1 et héréditaire, cette propriété $\wp_n$ est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

Montrons maintenant par récurrence que tous les termes de la suite sont strictement positifs :

Pour cela, considérons la propriété $\wp_k$ dépendant de l'entier *k* :
« Pour tout indice *j* tel que $2^k \leq j < 2^{k+1}$, l'inégalité $u_j > 0$ est vérifiée »

Initialisation : La propriété $\wp_0$ est vérifiée puisque le seul indice concerné est l'indice $j = 2^0 = 1$ pour lequel $u_1 = 1 > 0$.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier *k*, la propriété $\wp_k$ soit vérifiée. C'est-à-dire supposons que pour tout indice *j* tel que $2^k \leq j < 2^{k+1}$, l'inégalité $u_j > 0$ soit vérifiée. Alors :

$u_j > 0 \implies \begin{cases} u_{2j} = u_j + 1 > 0 \\ u_{2j+1} = \frac{u_j}{u_j+1} > 0 \end{cases}$. Lorsque *j* décrit l'ensemble $\{2^k, 2^k+1, \dots, 2^{k+1}-1\}$, l'entier $2j$ décrit tous les indices pairs de l'ensemble $\{2^{k+1}, 2^k+1, \dots, 2^{k+2}-1\}$ et l'entier $2j+1$ en décrit tous les indices impairs. Ainsi : $\wp_k \implies \wp_{k+1}$. La propriété $\wp_k$ est héréditaire. La propriété $\wp_k$ est vérifiée pour tout entier naturel *k*, ce qui démontre que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ sont strictement positifs.

NB. Démontrons brièvement au passage un lemme qui nous sera utile dans la question 5.

L'entier *n* étant fixé, pour tout entier naturel *k* :

- D'une part : $u_{2^k n} = u_n + k$ (relation obtenue en itérant la relation de duplication)
- D'autre part (relation $\mathcal{R}_k$ que nous démontrerons par récurrence) :

$$u_{2^{k-1}n + (2^{k-1}-1)} = \frac{u_n}{k \times u_n + 1}$$

Initialisation : $\mathcal{R}_k$ est vérifiée pour $k = 0$ et $k = 1$.

Hérédité : Supposons $\mathcal{R}_k$ vérifiée à un certain rang *k*.

Utilisons une relation de la **question 4** avec $N = 2^{k-1}n + \left(2^{k-1} - 1\right)$:

$$u_{2N+1} = \frac{u_N}{u_N + 1} = \frac{\frac{u_n}{k \times u_n + 1}}{\frac{u_n}{k \times u_n + 1} + 1} = \frac{u_n}{(k+1) \times u_n + 1}$$

Or : $2N + 1 = 2 \times \left(2^{k-1}n + \left(2^{k-1} - 1\right)\right) + 1 = 2^k n + \left(2^k - 1\right)$, ce qui montre que, si $\mathcal{R}_k$ est vérifiée, alors $\mathcal{R}_{k+1}$ l'est aussi. $\mathcal{R}_k$ est héréditaire.

$\mathcal{R}_k$ est donc vérifiée pour tout entier naturel *k*.

5. Etudions d''abord deux cas particuliers.

Cas des entiers.

La relation de récurrence $u_{2n} = u_n + 1$ montre que la suite $\left(u_{2^k}\right)_{k\geq 0}$ constituée par les termes dont les index sont des puissances de 2 est une suite arithmétique de raison 1. Son premier terme est $u_1 = 1$.

Nous pouvons en déduire que pour tout entier naturel k : $u_{2^k} = k + 1$.

Tous les entiers strictement positifs sont des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Cas des inverses d'entiers.

Pour tout entier $k \geq 1$: $u_{2^k} = k + 1 = 1 + 2v(2^k) - \frac{1}{u_{2^k-1}} = 1 + 2k - \frac{1}{u_{2^k-1}}$ d'où nous déduisons :

$-k = -\frac{1}{u_{2^k-1}}$ soit : $u_{2^k-1} = \frac{1}{k}$.

Les termes d'indices précédant ceux qui sont des puissances de 2 sont les inverses d'entiers.

Généralisons maintenant aux rationnels non entiers $\frac{a}{b}$.

Remarquons d'abord que, pour un entier $b > 1$ fixé, si tous les rationnels de $\left\{\frac{1}{b} ; \frac{2}{b} ; \ldots ; \frac{b-1}{b}\right\}$ sont des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, alors il en est de même de tous les rationnels de la forme $\frac{a}{b}$ quel que soit l'entier $a > 0$.

En effet, soit $a = kb + r$ la division euclidienne de a par b (avec $0 \leq r < b$). Alors : $a = k + \frac{r}{b}$.

Soit $n(r)$ l'indice pour lequel $u_{n(r)} = \frac{r}{b}$. D'après le lemme évoqué en **question 4**, $u_{2^k \times n(r)} = k + \frac{r}{b} = \frac{a}{b}$.

Montrons maintenant par récurrence forte sur l'entier b la propriété $\wp_b$: « Tous les rationnels de $\left\{\frac{1}{b} ; \frac{2}{b} ; \ldots ; \frac{b-1}{b}\right\}$ sont des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ ».

Initialisation : L'examen des huit premiers termes montre que les rationnels $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$ sont des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. Les propriétés $\wp_1$ et $\wp_2$ sont vérifiées.

Hérédité : Supposons que la propriété $\wp_j$ soit vérifiée jusqu'à un certain entier *b*.

Soit $\frac{p}{b+1}$ un rationnel de l'ensemble $\left\{\frac{1}{b+1} ; \frac{2}{b+1} ; \ldots ; \frac{b}{b+1}\right\}$.

Ecrivons la division euclidienne de $(b+1)$ par p : $b + 1 = k \times p + r$ avec $0 \leq r < p \leq b$

Si $r = 0$, $\frac{p}{b+1}$ est un inverse d'entier, nous avons vu qu'il s'agissait d'un terme de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. Sinon :

$$\frac{p}{b+1} = \frac{p}{k \times p + r} = \frac{\frac{p}{r}}{k\frac{p}{r} + 1}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $\frac{p}{r}$ est un terme de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ puisque son dénominateur est $\leq b$.

D'après le lemme évoqué en **question 4**, $\frac{p}{b+1} = \frac{\frac{p}{r}}{k\frac{p}{r}+1}$ en est un autre.

Il en résulte que tous les rationnels de l'ensemble $\left\{\frac{1}{b+1} ; \frac{2}{b+1} ; \ldots ; \frac{b}{b+1}\right\}$ sont eux-aussi des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et cette propriété implique que tous les rationnels de dénominateur $(b+1)$ sont des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ quel que soit leur numérateur.

Si $\wp_j$ est vérifiée jusqu'à un certain rang b, elle est vérifiée jusqu'au rang $(b+1)$.

Elle est donc universellement vérifiée.

Tous les rationnels strictement positifs sont des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

6. Montrons d'abord que u_1 est le seul terme de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ qui est égal à 1.

Supposons qu'il en existe un autre, d'indice > 1.

- Il ne peut pas être d'indice impair $2n+1$ (avec $n > 0$) , car la relation $\frac{u_n}{u_n+1} = u_{2n+1} = 1$ est impossible.
- Il ne peut pas non plus être d'indice pair $2n$ (avec $n > 0$) , car nous aurions $u_n = u_{2n} - 1 = 0$ et dans ce cas tous les termes suivants devraient être nuls.

Notre hypothèse est à rejeter.

Montrons maintenant qu'il n'est pas possible qu'il existe deux indices *m* et *n* distincts tels que $u_m = u_n$:

Supposons qu'il existe deux tels indices *m* et *n*. Ils doivent avoir la même parité, puisque les termes d'indices impairs sont tous < 1 alors que ceux d'indices pairs sont tous > 1.

- S'ils sont tous deux pairs, $m = 2m'$; $n = 2n'$, alors, vu que $\begin{cases} u_{m'} = u_m - 1 \\ u_{n'} = u_n - 1 \end{cases}$:

  $u_m = u_n \implies u_{m'} = u_{n'}$. Les deux termes « d'indices moitié » sont eux aussi égaux.

- S'ils sont tous deux impairs $m = 2m'+1$; $n = 2n'+1$, alors, vu que : $\begin{cases} u_{2m'} = \frac{1}{1-u_m} \\ u_{2n'} = \frac{1}{1-u_n} \end{cases}$:

  $u_m = u_n \implies u_{2m'} = u_{2n'} \implies u_{m'} = u_{n'}$. Conclusion semblable, $m' = \frac{m-1}{2}$; $n' = \frac{n-1}{2}$.

Nous obtiendrions ainsi deux autres termes égaux, d'indices strictement plus petits que *m* et *n*.

En itérant ce procédé, nous pourrions construire deux suites de termes deux à deux égaux, dont les indices formeraient des suites d'entiers strictement positifs strictement décroissantes.

Nécessairement, le nombre d'itérations possibles est fini et nous aboutirions au cas où l'un des termes est le terme u_1, dont nous avons prouvé l'impossibilité.

L'hypothèse d'existence de deux indices *m* et *n* distincts tels que $u_m = u_n$ est à rejeter.

Tout rationnel strictement positif est égal à un seul terme de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

NB. L'application $n \in \mathbb{N}^* \longmapsto f(n) = u_n \in \mathbb{Q}^{*+}$ est ainsi une application surjective (question 5) et injective (question 6). Elle réalise une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q}^{*+}$. La suite étudiée dans cet exercice permet de numéroter l'ensemble des rationnels strictement positifs.